Elementos de algebra

MZ

2025

1. Funciones matemáticas

1.1. Definición de función

1.1.1. Ejercicio

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. decir cuales de las siguientes correspondencias son funciones de A en B. :

a)

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c$$

b)

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = c$$

c)

$$f(1) = a, \quad f(3) = c, \quad f(1) = c, \quad f(2) = c, \quad f(4) = d, \quad f(4) = a$$

1.1.2. Ejercicio

Decir cual es el mayor conjunto $A \subset \mathbb{R}$ para el cual cada una de las siguientes correspondencias es función de A en $\mathbb{R}$. (Es decir, hallar en cada uno de los casos el dominio de las funciones)

a)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2 - 3x}$$

d)

$$f(x) = \frac{3^{x^2} - 4}{2(x^2 - 1)^x - 2}$$

e)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

f)

$$f(x) = \frac{2x}{x+4}$$

g)

$$f(x) = \frac{x^{3/4} - 1}{(x^2 - 9)^{3/2} - 1}$$

h)

$$f(x) = \frac{(1 - x^2)^{3/2} + 2/(x-1)}{4^{x^{-1}} - 2}$$

i)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

j)

$$f(x) = \sqrt{4 - 4x^2}$$

k)

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{2^{-2x+2} - 1}$$

l)

$$f(x) = \frac{\sqrt{5^{x^2} - 5}}{2^x + 4}$$

1.2. Funciones lineales. Representación gráfica

1.2.1. Ejercicio

Representar en el plano los siguientes pares ordenados:

$$(2,4); (-1,3); (2,-1); (-2,-3); (0,1); (0,-2); (3,0); (-1,0)$$

1.2.2. Ejercicio

a) Decir cuales de los siguientes pares ordenados pertenecen al gráfico de la función: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 3$: (1, 0), (2, 4) ; (3, 12); (-2, -3); (0, 3); (-1, -4)

b) Analogamente para $f(x) = \frac{2x+1}{3+|x-2|}$ y los pares: $(0, 1/3); (2, 5/3); (-1, 4); (3, 7); (1, 3/4)$

1.2.3. Ejercicio

Representar gráficamente las siguientes funciones lineales:
a)

$$f(x) = x - 1$$

b)

$$f(x) = 2x - 3$$

c)

$$f(x) = -x + 2$$

d)

$$f(x) = -2x + 1$$

e)

$$f(x) = 4x + 1$$

f)

$$f(x) = -5x + 4$$

1.2.4. Ejercicio

Representar graficamente las siguientes funciones
a)

$$f(x) = 2|x|$$

b)

$$f(x) = |x - 1|$$

c)

$$f(x) = |2x + 2|$$

d)

$$f(x) = 3|x - 4| + 2$$

e)

$$f(x) = |6 - 2x| - 5$$

f)

$$f(x) = |x + 1| + |x - 2|$$

g)

$$f(x) = 2|x - 2| + 3|x + 1|$$

h)

$$f(x) = |3x - 4| + 2|4x + 1|$$

i)

$$f(x) = 2x + |x|$$

j)

$$f(x) = 6x + 3 + |x - 1| + |3 - x|$$

k)

$$f(x) = -2x + |4x - 1| + |2 - x|$$

l)

$$f(x) = 3x + |2x - 1| - |5x - 2|$$

1.2.5. Ejercicio

a) Hallar la función lineal cuyo gráfico contiene los pares $(1, 2); (2, 5)$. (Sugerencia, debe ser $2 = m \cdot 1 + b, \quad 5 = m \cdot 2 + b$)

b) Idem para $(2, 4); (-1, 2)$

c) Idem para $(0, -2); (-1, 1)$

1.2.6. Ejercicio

Sea f una función lineal cualquiera, probar que cualquiera sean los números reales x, x' vale:

$$f(x + x') = f(x) + f(x') - f(0)$$

1.2.7. Ejercicio

Probar que no existe ninguna función lineal cuyo gráfico contenga los pares $(1, 3); (2, 4); (-1, 1)$

1.3. Funciones polinómicas

1.3.1. Ejercicio

a) Probar que la función $f(x) = x^{2n-1}$ crece cuando crece x. (Es decir que si $x < x'$, entonces $f(x) < f(x')$. Sugerencia: inducción sobre n

b) Probar que la función $f(x) = x^{2n}$ crece cuando x es positivo y decrece cuando x es negativo. (Es decir que si $0 < x < x'$, entonces $f(x) < f(x')$ y si $x < x' < 0$, entonces $f(x) > f(x')$

1.3.2. Ejercicio

a) Probar que una función de grado 1 siempre tiene exactamente una raiz.

b) Probar que si $a \neq 0$ y b, c son números reales cualesquiera, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ vale:

$$ax^2 + bx + c = a[(x + b/2a)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$$

(Conocido como Çompletación de cuadrados")

c) Deducir de b) que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos raices si $b^2 - 4ac > 0$, una raiz si $b^2 - 4ac = 0$ y ninguna si $b^2 - 4ac < 0$.

1.3.3. Ejercicio

Sea f la función dada por $f(x) = x^2 - 3x + 2$
a) Verificar que 1 es raiz de f.
b) Encontrar una función polinómica g, de grado 1 tal que $f(x) = (x-1)\cdot g(x)$

1.3.4. Ejercicio

Sea f la función de grado 3 dada por $f(x) = x^3 + 1$.
a) Verificar que -1 es raiz de f.
b) Encontrar una función polinómica g, de grado 2 tal que $f(x) = (x+1)\cdot g(x)$

1.3.5. Ejercicio

Encontrar todas las funciones polinómicas de grado 3 cuyas raices sean $1, -1, 2$.

1.3.6. Ejercicio

Sean f, g funciones polinómicas de grado n con las mismas raices $d_1, \cdots, d_n$.
a) Probar que existe un número real $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C \cdot g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) Porque la conclusión anterior no vale para las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $(g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, que tienen la misma raiz -1?

1.3.7. Ejercicio

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es par si $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ (Ejemplo x^2). Y se dice que es impar si $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (Ejemplo: x, x^3)
a) Probar que las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $f(x) = |x| + x^4$ y $f(x) = 4$ son pares.
b) Probar que las funciones $f(x) = 2x^3 + 3x$ y $f(x) = x^5 - 2x^3$ son impares.
c) Probar que la función $f(x)x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ no es ni par ni impar. (Sugerencia: suponer que si y contradecir la proposición 2.5).
d) Que propiedad de simetría tiene la representación gráfica de las funciones pares y que propiedad tienen las impares?

1.3.8. Ejercicio

Sean f, g funciones polinómicas de grados n, m respectivamente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$f(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $n = m$ y además $a_i = b_i$ para todo $i \leq n$. (Sugerencia, aplica la proposición 2.5 a la función
$x \longrightarrow f(x) - g(x)$

1.4. Funciones inyectivas y sobreyectivas

1.4.1. Ejercicio

Hallar el dominio de las siguientes funciones. Decidir en cada caso si la función es o no inyectiva / sobreyectiva, y si no es sobreyectiva, indicar su imagen.

a)
$$f(x) = 6x - 2$$

b)
$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

c)
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

d)
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

e)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

f)
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

g)
$$f(x) = \frac{2x}{x+4}$$

h)
$$f(x) = |x|$$

i)
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

j)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

k)
$$f(x) = \frac{|x|}{1 + |x - 2|}$$

l)
$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

m)
$$f(x) = 2x^2 - 4x + 6$$

1.4.2. Ejercicio

Decir cuales funciones lineales son inyectivas y sobreyectivas.

1.4.3. Ejercicio

Probar que una función creciente es inyectiva. Dar un ejemplo de una función creciente que no sea sobreyectiva.

1.5. Composición de funciones y funciones inversas

1.5.1. Ejercicio

Sea $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que la inversa de f es única, (es decir que si g_1 y g_2 son inversas de f, entonces $g_1(x) = g_2(x), \forall x \in B$)

1.5.2. Ejercicio

Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 + 1$ y $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Hallar:
a) $g(f(2))$, b) $f(g(2))$, c) g(g(2)),
d) $g(1 + f(2))$, e) $1 + g(f(2))$, f) $f(g(f(2)))$

1.5.3. Ejercicio

Dadas las funciones $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{2}$ y $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, hallar $f \circ g$ especificando cuales son los dominios en cada caso.

1.5.4. Ejercicio

Hallar f sabiendo que es lineal y que.

$$g \circ f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$g(x) = x^2 + x + 3$$

1.5.5. Ejercicio

Probar que la inversa de una función biyectiva es biyectiva.

1.5.6. Ejercicio

Probar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva e impar entonces f^{-1} es impar.

1.5.7. Ejercicio

Probar que si $f \circ g$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.

1.5.8. Ejercicio

Probar que si $f \circ g$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.

1.5.9. Ejercicio

Probar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar sus inversas:
a)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 6x - 3$$

b)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 2$$

c)

$$f : \mathbb{R}_{\neq 2} \longrightarrow \mathbb{R}_{\neq 1}, \quad f(x) = \frac{x}{x-2}$$

d)

$$f : \mathbb{R}_{\neq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\neq 3}, \quad f(x) = \frac{3x^3}{x^3 - 1}$$

e)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

f)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x - 2|x|$$

g)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\neq \pm 1}, \quad f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

1.5.10. Ejercicio

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función biyectiva, mostrar con un argumento geométrico que su representación gráfica y la de f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$. (Sugerencia: ver que los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a esa recta). Aprovechar este hecho para hacer la representación gráfica de $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt[4]{x}$.

1.6. Funciones logaritmicas

1.6.1. Ejercicio

Indicando por $log_a : \mathbb{R}_{<0} \longrightarrow \mathbb{R}$ la inversa de $f(x) = a^x$. Probar que:
a)

$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y, \quad x, y \in \mathbb{R}_{<0}$$

b)

$$log_a(x^y) = y \cdot log_a x, \quad x \in \mathbb{R}_{<0}, y \in \mathbb{R}$$

c)

$$a^x = e^{x \cdot lna}, \quad x \in \mathbb{R}$$

d)

$$log_a x = \frac{log_a y}{log_x y}, \quad x, y \ \in \mathbb{R}_{>0}, \quad x \neq 1$$

e) Si $0 < x < y$, entonces $log_a x < log_a y$, si $a > 1$ (Sugerencia: para ver en clase)

f) Si $0 < x < y$, entonces $log_a x > log_a y$, si $0 < a < 1$ (Sugerencia: para ver en clase)

1.6.2. Ejercicio

Sean a, b números reales mayores que cero. Probar que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$ es:

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$(a/b)^x = a^x / b^x$$

(calcular $ln(ab)^x$y usar el hecho de que la función ln es inyectiva por el ejercicio 1.e)

1.7. Funciones trigonométricas

1.7.1. Ejercicio

Calcular el valor de las funciones trigonométricas (si están definidas) en:

$$0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$$

1.7.2. Ejercicio

Probar la segunda de las fórmulas (referida a la suma) para ángulos entre 0 y $\pi/2$

1.7.3. Ejercicio

A partir de las fórnulas de la suma y resta y del ejercicio 1, probar las siguientes propiedades de las funciones trigonométricas:

a)

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

b)

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

c)

$$\cos(-x) = \cos x$$

d)

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$$

e)

$$\cos x = -\cos(\pi - x)$$

f)

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$$

g)

$$\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$$

h)

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

i)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

j)

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

k)

$$\cos x - \cos y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

1.7.4. Ejercicio

Sabiendo que $\cos t = 2/5$, calcular: $|\operatorname{sen} t|$, $|\tan t|$, $|\cot t|$, $\sec t$, $|\operatorname{cosec} t|$

1.7.5. Ejercicio

Probar que:
a)

$$|\operatorname{sen}\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

b)

$$|\cos\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

(Sugerencia, usar 2i) poniendo x/2 en lugar de x)

1.7.6. Ejercicio

Hacer la representación gráfica de la función tangente.

1.7.7. Ejercicio

Probar que.:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

si $x, y, x+y$ no son múltiplos impares de $\pi/2$

1.7.8. Ejercicio

Probar que: a)

$$\operatorname{sen} x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

b)

$$|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

(Sugerencia, elevar $\operatorname{sen} x/\cos x = \tan x$ al cuadrado y usar 2a))

1.8. Funciones en el plano

1.8.1. Rectas en el plano

1.8.2. Ejercicio

Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos de coordenadas:

a) $(1,3)$ y $(2,5)$

b) $(2,1)$ y $(3,-1)$

c) $(2,3)$ y $(2,4)$

d) $(3,1)$ y $(-2,1)$

Pasar cada una de las ecuaciones a la forma general.

1.8.3. Ejercicio

a) Sean L_1 la recta de ecuación $y = m_1x + b_1$ y L_2 la recta de ecuación $y = m_2x + b_2$. Mostrar que $L_1 = L_2$ si y solo si $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$.

b) Sean L_1 la recta de ecuación $y = mx+b$ y L_2 la recta de ecuación $x = x_0$. Mostrar que $L_1 \neq L_2$

c) Sean L_1 la recta de ecuación $x = x_0$ y L_2 la recta de ecuación $x = x_0'$. Mostrar que $L_1 = L_2$ si y solo si $x_0 = x_0'$

d) Sea L_1 la recta de ecuación $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ y L_2 la recta de ecuación $A_2x+B_2y+C_2 = 0$. Mostrar que $L_1 = L_2$ si y solo si existe un número real $r \neq 0$ tal que $A_2 = rA_1, \quad B_2 = rB_1, \quad C_2 = rC_1$ (O sea si y solo si sus coeficientes son proporcionales).

1.8.4. Ejercicio

a)

$$\begin{cases} L_1 : 2x + y - 1 = 0 \\ L_2 : x - y + 3 = 5 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} L_1 : y = 3x + 2 \\ L_2 : x = 1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} L_1 : y = -x + 3 \\ L_2 : 3x + y = 2 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} L_1 : 2x - 3y + 2 = 0 \\ L_2 : x = -3 \end{cases}$$

1.8.5. Ejercicio

a) Hallar la ecuación de la recta que corta al eje de abcisas en $x = 3$ y $y = 1$.

b) Mostrar que la recta que corta al eje de abcisas en $x = a$ y al eje de ordenadas en $y = b$ tiene ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

1.8.6. Ejercicio

Mostrar que la ecuación general de las rectas no verticales que pasan por (x_0, y_0) es $y - y_0 = m(x - x_0)$.

a) Mostrar que los puntos de coordenadas $(3, 2), (2, 1), (4, 3)$ son colineales (es decir, que pertenecen a una misma recta).

b) Mostrar que los puntos de coordenadas $(2, 5), (3, 1), (1, 3)$ no son colineales.

1.9. Rectas paralelas y perpendiculares. Distancias

1.9.1. Ejercicio

Para las siguientes rectas L y puntos P hallar la ecuación de la recta paralela a L que pasa por P.

a)

$$L : 3x - 2y + 1 = 0; \qquad P : (1, 2)$$

b)

$$L : y = 2x + 4; \qquad P : (-2, 3)$$

c)

$$L : x = 3; \qquad P : (1, 5)$$

d)

$$L : y = 2 \qquad P : (2, 1)$$

1.9.2. Ejercicio

Mostrar que por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a esta.

1.9.3. Ejercicio

Sea L_1 la recta de ecuación $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y L_2 la recta de ecuación $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Mostrar que $L_1//L_2$ si y solo si existe un número real $r \neq 0$ tal que $A_2 = rA_1,\ B_2 = rB_1$

1.9.4. Ejercicio

Calcular la distancia entre los puntos P y Q de coordenadas
a) $(2, 1)$ y $(3, 5)$
b) $(-3, 1)$ y $(2, 3)$
c) $(2, 1)$ y $(4, 1)$
d) $(4, 3)$ y $(4, -2)$

1.9.5. Ejercicio

¿Que inconveniente surgiría si tomásemos distintas escalas en los ejes y siguiesemos definiendo la distancia entre dos puntos por (*)?

1.9.6. Ejercicio

Si para puntos P y Q del plano designamos por $d(P, Q)$ a la distancia entre P y Q a la distancia entre P y Q definida por (*), mostrar que se cumplen las siguientes propiedades:
a)
$$d(P, Q) \geq 0$$
b)
$$d(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$$
c)
$$d(P, Q) = d(Q, P)$$
d)
$$d(P, Q) \leq d(P, T) + d(T, Q)$$
para todo T punto del plano. (Desigualdad triangular).

1.9.7. Ejercicio

Hallar la distancia entre la recta L y el punto P siendo:
a)
$$L : 2x - y + 1 = 0, \qquad P : (1, 5)$$

b)

$$L : y = 3x - 1 \qquad P : (0, 3)$$

c)

$$L : x = 2 \qquad P : (1, 1)$$

d)

$$L : y = 3 \qquad P : (2, 6)$$

1.9.8. Ejercicio

Partiendo de (11), mostrar que por un punto P exterior a una recta L para una única recta L' perpendicular a L .

1.9.9. Ejercicio

Si P y Q son puntos del plano, llamamos **punto medio del segmento** PQ a aquel punto T de la recta determinada por P y Q cuya distancia a P es igual a su distancia a Q. Mostrar que si P tiene coordenadas (x_0, y_0) y Q tiene coordenadas (x_1, y_1), entonces T tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$$

1.9.10. Ejercicio

Hallar los puntos P cuyas distancias a la recta de ecuación $4x - 3y + 1 = 0$ midan 4.

1.9.11. Ejercicio

Si P y Q son puntos del plano, se llama **mediatriz del segmento** PQ a la recta perpendicular a la recta L determinada por P y Q que pasa por el punto medio del segmento PQ. Si T es un punto del plano no perteneciente a L, se denomina **mediana** entre P y Q por T a la recta que pasa por T y por el punto medio del segmento PQ .

a) Mostrar que las tres mediatrices posibles de formar con P, Q, T son concurrentes (es decir, las tres pasan por un mismo punto; esto es lo mismo que decir que las mediatrices de un triangulo son concurrentes).

b) Probar que las tres medianas posibles de formar con P, Q, T son concurrentes.

1.9.12. Ejercicio

Probar que el conjunto de los puntos equidistantes a dos puntos fijos P y Q es la mediatriz del segmento PQ. Deducir que en un triángulo isósceles hay una recta que es mediana y mediatriz.

1.9.13. La parábola

1.9.14. Ejercicio

Se llama **eje** de una parábola a la recta que pasa por el vértice y el foco. Hallar la ecuación de la parábola tal que:

a) su eje es el eje de coordenadas, su vértice es el punto de coordenadas $(0, 5)$ y que pasa por el punto de coordenadas $(10, -5)$.

b) su eje es la recta de ecuación $y = 3$, su vértice es el punto de coordenadas $(-3, -3)$ y que pasa por el punto de coordenadas $(-6, 3)$.

1.9.15. Ejercicio

Hallar la ecuación de la parábola tal que:

a) su directriz es la recta de ecuación $y = x - 1$ y su foco es el punto de coordenadas $(2, 3)$.

b) su directriz es la recta de ecuación $y = 2x + 3$ y su vértice es el punto de coordenadas $(2, 9)$.

1.9.16. Ejercicio

Sea L la recta paralela a la directriz de una parábola que pasa por el foco. Si L corta a la parábola en los puntos A y B y si C es la intersección del eje de la parábola con la directriz, probar que el ángulo ACB es recto.

2. Sistemas de Ecuaciones lineales

2.1. Ecuaciones lineales homogeneas

2.1.1. Ejercicio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

2.2. Ecuaciones lineales no homogeneas

2.2.1. Ejercicio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

2.2.2. Ejercicio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

2.2.3. Ejercicio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

2.2.4. Ejercicio

$$\{ \ x + 2y - 3z = 4$$

(Interpretar geometricamente el conjunto solución obtenido)

2.2.5. Ejercicio

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \end{cases}$$

(Interpretar geometricamente el conjunto solución obtenido)

2.2.6. Ejercicio

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \end{cases}$$

(Interpretar geometricamente el conjunto solución obtenido)

2.2.7. Ejercicio

Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga solución única:

a)

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 = 0 \\ x_1 + (3k-4)x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 + (k/2)x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Algebra de matrices

3.1. Ejercicio

Hallar la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2. Ejercicio

- Confirmar que la matriz hallada en el ejercicio anterior es la inversa usando la definición de inversa.

- Hallar la inversa utilizando otro metodo que en el ejercicio anterior (los dos métodos que vimos son el de Gauss Jordan y por la adjunta)

3.3. Ejercicio

Hallar el determinante de la siguiente matriz. Es inversible la matriz? porque?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si es inversible, hallar la inversa y probar que lo es.

3.4. Ejercicio

Sea $a \in \mathbb{R}^{3x3}$ tal que $Det\ (A) = -3$. Hallar utilizando propiedades el $Det\ (A^{-1})$

3.5. Ejercicio

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Existen $A^{-1},\ B^{-1}$

4. Programación lineal